1. EXPERIMENTOS FATORIAIS: ANALISANDO UM EXPERIMENTO FATORIAL A X B. O método de análise de um experimento fatorial 2 x 2 pode, de uma maneira geral, ser estendido a qualquer experimento fatorial a x b. a estratégia para analisar um experimento fatorial a x b é a mesma utilizada para os experimentos fatoriais 2 x 2.

- teste a interação entre os dois fatores.
- se a interação é significativa, então analisamos os efeitos simples dos dois fatores.
- se a interação é não significativa, então analisamos os efeitos principais de cada fator

Exemplo 1 Casualização dos tratamentos de um esquema fatorial 2 x 3 em ***DBC*** com 4 repetições:

		Tratamentos
	b_1	a_1b_1
a_1	b_2	a_1b_2
	b_3	a_1b_3
	b_1	a_2b_1
a_2	b_2	a_2b_2
	b_3	a_2b_3

BLOCO I	*BLOCO II*	*BLOCO III*	*BLOCO IV*
a_2b_1	a_2b_3	a_1b_2	a_1b_1
a_1b_2	a_2b_2	a_2b_1	a_1b_3
a_2b_2	a_1b_1	a_2b_2	a_2b_1
a_2b_3	a_2b_1	a_1b_3	a_2b_2
a_1b_1	a_1b_2	a_2b_3	a_1b_2
a_1b_3	a_1b_3	a_1b_1	a_2b_3

Esquema da ANOVA

Fonte de Variação	*g l*
Fator A	*a - 1*
Fator B	*b - 1*
Int. A x B	*(a – 1)(b – 1)*
Tratamentos	*ab - 1*
Blocos	*r -1*
Resíduo	*(ab -1)(r – 1)*
Total	*abr - 1*

De uma maneira geral as somas de quadrados são dadas por:

$$SQT = (Y_{111}^2 + \dots + Y_{abk}^2) - \frac{Y_{+++}^2}{abr}$$

$$SQTr = \frac{Y_{11+}^2}{r} + \frac{Y_{12+}^2}{r} + \dots + \frac{Y_{ab+}^2}{r} - \frac{Y_{+++}^2}{abr};$$

$$SQ(A) = \frac{Y_{1++}^2}{br} + \frac{Y_{2++}^2}{br} + \dots + \frac{Y_{i++}^2}{br} - \frac{Y_{+++}^2}{abr};$$

$$SQ(B) = \frac{Y_{+1+}^2}{ar} + \frac{Y_{2++}^2}{ar} + \dots + \frac{Y_{+j+}^2}{ar} - \frac{Y_{+++.}^2}{abr};$$

$$SQ(AxB) = SQ(A,B) - SQ(A) - SQ(B), \text{ ou } SQ(AxB) = SQTr - SQ(A) - SQ(B)$$

Como dissemos na aula passada: nos fatoriais A x B a Soma de Quadrados Conjunta ***SQ(A,B)*** é igual à Soma de Quadrados dos Tratamentos ***SQTr***.

Quadro da ANOVA no DIC

F.V.	*G.L.*	*S.Q.*	*Q.M.*	*F*
A	*a-1*	*S.Q.(A)*	*Q.M.(A)*	F_A
B	*b-1*	*S.Q.(B)*	*Q.M.(B)*	F_B
Interação A x B	*(a-1)(b-1)*	*S.Q.(AB)*	*Q.M.(AB)*	F_{AB}
Tratamentos	*ab-1*	*S.Q. Trat.*	*Q.M. Trat.*	F_{Tr}
Resíduo	*ab (r-1)*	*S.Q. Res.*	*Q.M. Res.*	
Total	*abr-1*	*S.Q. Total*		

Exemplo 2. Fatorial 2 x 3 (com interação não significativa):
O crescimento do conteúdo de água em tecidos de lesmas sob 6 diferentes condições experimentais foi avaliada. As 6 condições foram obtidas combinado-se os dois níveis de temperatura (fator A) com três níveis de umidade (fator B) com. Foram feitas 4 repetições para cada combinação de tratamento. Os resultados, em porcentagem, foram :

Fator A Temperatura ºC)	***Fator B - Umidade (%)***					
	45		***75***		***100***	
20	76	64	72	82	100	96
	79	71	86	86	92	100
30	72	72	72	75	100	94
	64	70	82	84	98	99

Os totais das 4 repetições para o fatorial A x B = (2)(3)= 6 tratamentos são os seguintes:

(4)	***Níveis de B (Umidade (%))***			
Níveis de A (Temperatura ºC))	***b_1 = 45 %***	***b_2 = 75 %***	***b_3 = 100 %***	**Total**
a_1 = 20 ºC	*290*	*326*	*388*	***1004***
a_2 = 30 ºC	*278*	*313*	*391*	***982***
Total	***568***	***639***	***791***	***1986***

$$SQT = (76^2 + ... + 99^2) - \frac{1986^2}{(2)(3)(4)} = 3386,5$$

$$SQTr = \frac{290^2}{4} + \frac{326^2}{4} + ... + \frac{391^2}{4} - \frac{1986^2}{(2)(3)(4)} = 2922,0;$$

$$SQ(A) = \frac{1004^2}{(3)(4)} + \frac{982^2}{(3)(4)} - \frac{1986^2}{(2)(3)(4)} = 20,17;$$

$$SQ(B) = \frac{568^2}{(2)(4)} + ... + \frac{779^2}{(2)(4)} - \frac{1986^2}{(2)(3)(4)} = 2881,75;$$

$$SQ(A*B) = SQTr - SQ(A) - SQ(B) =$$
$$= 2922,0 - 20,17 - 2881,75 = 20,08$$

QUADRO DA ANOVA

F.V.	*G.L.*	*S.Q.*	*Q.M.*	*F*
Temperatura (A)	*1*	*20,17*	*20,17*	$0,78^{ns}$
Umidade (B)	*2*	*2881,75*	*1440,88*	$55,85^{**}$
Interação A x B	*2*	*20,08*	*10,04*	$0,39^{ns}$
Tratamentos	*(5)*	*2922,0*	*584,40*	$22,65^{*}$
Resíduo	*18*	*464,5*	*25,81*	
Total	*23*	*3386,5*		

$F_{(1,\ 18;\ 0,05)} = 4,41$ $F_{(1,\ 18,\ 0,01)} = 8,29$ $F_{(2,\ 18;\ 0,05)} = 3,55$ $F_{(2,\ 18,\ 0,01)} = 6,01$
$F_{(5,\ 18;\ 0,05)} = 2,77$ $F_{(5,\ 18,\ 0,01)} = 4,25$

Do quadro acima, observamos que o teste da interação entre a temperatura e umidade não é significativa (*p>0,05*), e concluímos que os dados não suportam a hipótese de uma interação entre temperatura e umidade. Dado que a interação não foi significativa, a análise prossegue analisando-se os efeitos principais da temperatura e da umidade isoladamente. Isto pode ser feito analisando-se os dois tipos de diferenças:

- as diferenças entre os conteúdos médios da água nos tecidos nos dois níveis de A (*temperatura*).
- as diferenças entre os conteúdos médios da água nos tecidos nos três níveis de B (*umidade*).

O teste F para o efeito principal A é não significativo (*p>0,05*), e portanto não existe evidências suficientes para concluir que os valores médios do conteúdo da água nos tecidos são diferentes nos dois níveis de temperatura, entretanto, o teste F para o efeito principal da umidade é altamente significativo (*p<0,01*), o que implica que os dados suportam a conclusão de que os valores médios do conteúdo da água nos tecidos não são os mesmos nos três níveis da umidade**.**
Isto pode ser visualizado na tabela de médias abaixo (última linha):

Médias dos tratamentos

(4) Níveis de A (Temperatura ºC))	Níveis de B (Umidade (%)) b_1 = 45 %	b_2 = 75 %	B_3 = 100 %	Médias de A Temperatura
a_1 = 20 ºC	72,50	81,50	97,00	**83,67 A**
a_2 = 30 ºC	69,50	78,25	97,75	**81,83 A**
Médias de B Umidade	**71,00 a**	**79,88 b**	**97,38 c**	**82,75**

Médias com a mesma letra maiúscula nas colunas não diferem entre si pelo teste de Tukey a 5%
Médias com a mesma letra minúscula nas linhas não diferem entre si pelo teste de Tukey a 5%

Cálculos do teste de Tukey:

- para o efeito principal A (temperatura):

$$q_{(2,18;0,05)} = 2,97$$

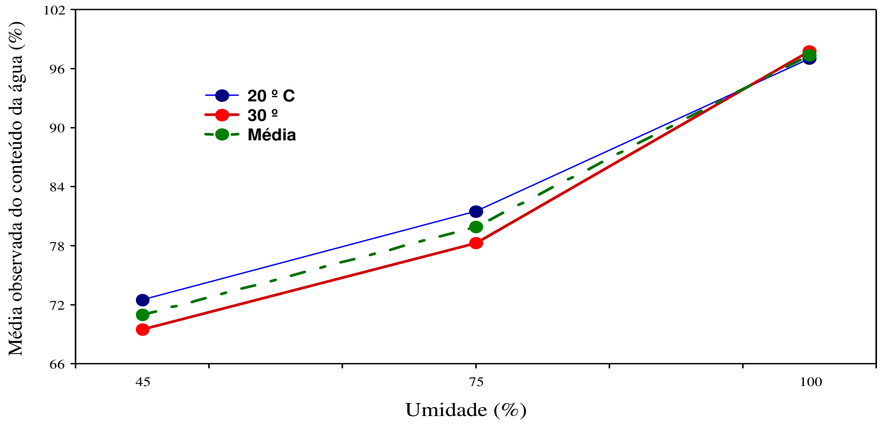
$$dms_A = 2,97\sqrt{\frac{25,81}{12}} = 4,36$$

- para o efeito principal de B (Umidade):

$$q_{(3,18;0,05)} = 3,63$$

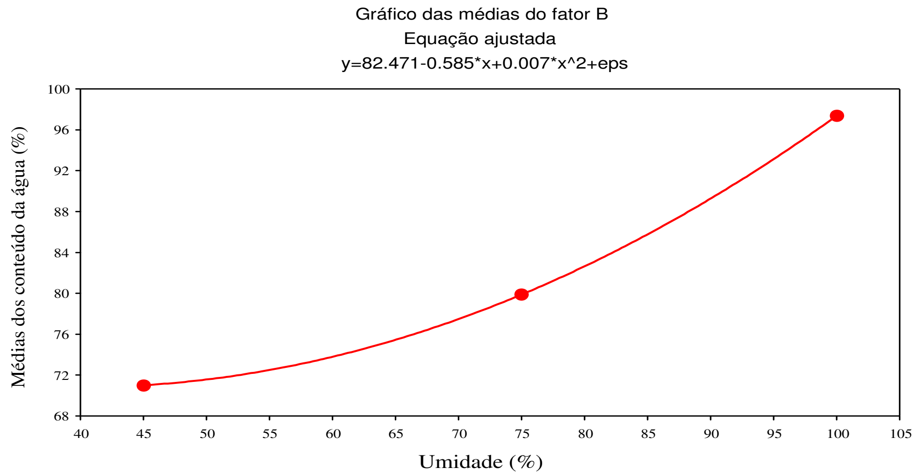
$$dms_B = 3,63\sqrt{\frac{25,81}{8}} = 6,52$$

Gráfico das médias dos tratamentos
Interação A x B



O gráfico das médias dos tratamentos fornece um conveniente método de mostrar os resultados. As linhas sólidas no gráfico da interação são praticamente paralelas; isto confirma o resultado do teste F para a interação entre temperatura e umidade. Mais ainda, a proximidade das duas linhas sólidas indicam que a diferença entre as respostas médias observadas nas duas temperaturas são não significativas; esta conclusão é confirmada pelo teste F do efeito principal da temperatura. Uma checagem gráfica para presença do efeito principal da umidade é dada pela orientação da linha pontilhada. Se o efeito principal de tal efeito não estivesse presente, então a linha pontilhada deveria estar paralela ao eixo x. O gráfico mostra que não é este o caso. O teste F para o efeito principal de B (umidade) suporta esta conclusão.

Outra forma de explicar a significância do fator B é por meio da regressão polinomial



Exemplo 3 : Análise e interpretação de um experimento fatorial com três fatores

Esquema fatorial 2 x 2 x 2 = 2^3 em um delineamento em blocos casualizados (***DBC***)para estudar a produção de leite de vacas holandezas arranjadas em 6 lotes com a mesma idade.

			Trat.	*sendo :*
a_1	b_1	c_1	$a_1b_1c_1$	
		c_2	$a_1b_1c_2$	*a1 : 0,5 kg de ração tipo A*
	b_2	c_1	$a_1b_2c_1$	*a2 : 0,5 kg de ração tipo B*
		c_2	$a_1b_2c_2$	*b1 : 0,5 kg de rolão de milho*
a_2	b_1	c_1	$a_2b_2c_1$	*b2 : 1,0 kg de rolão de milho*
		c_2	$a_2b_1c_2$	*c1 : 0 mg de vitamina* B_{12}
	b_2	c_1	$a_2b_2c_1$	*c2 : 5 mg de vitamina* B_{12}
		c_2	$a_2b_2c_2$	

6 Blocos (6 classes de idade)

Quadro de resultados

Fatores			BLOCOS						
A	**B**	**C**	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**Total**
1	**1**	**1**	3,029	3,857	2,448	2,448	3,543	4,314	**19,639**
1	**1**	**2**	2,438	3,086	3,771	4,657	1,962	3,210	**19,124**
1	**2**	**1**	3,448	3,600	3,895	4,267	3,086	3,657	**21,953**
1	**2**	**2**	3,533	5,048	3,467	4,095	1,876	2,895	**20,914**
2	**1**	**1**	3,362	3,714	3,429	3,190	2,686	4,038	**20,419**
2	**1**	**2**	4,905	6,295	4,924	4,952	5,381	5,543	**32,000**
2	**2**	**1**	4,171	3,114	4,124	3,981	3,038	3,590	**22,018**
2	**2**	**2**	4,476	4,752	4,848	4,676	6,829	3,771	**29,352**
Total			**29,362**	**33,466**	**30,906**	**32,266**	**28,401**	**31,018**	**185,419**

Para calcular as somas de quadrados dos efeitos A, B e C, inicialmente devemos organizar quadros auxiliares, que relacionam os níveis dos fatores 2 a 2, o que dá 3 quadros A com B, A com C e B com C.
Exemplo: Quadro I (A x B) totais de :

$\boldsymbol{a_1b_1 = a_1b_1c_1 + a_1b_1c_2}$ = 19,639 + 19,124 = 38,763
$\boldsymbol{a_1b_2 = a_1b_2c_1 + a_1b_2c_2}$ = 21,953 + 20,914 = 42,867
$\boldsymbol{a_2b_1 = a_2b_1c_1 + a_2b_1c_2}$ = 20,419 + 32,000 = 52,419
$\boldsymbol{a_2b_2 = a_2b_2c_1 + a_2b_2c_2}$ = 22,018 + 29,352 = 51,370

Quadro I (totais da interação A x B)

(12)	**Níveis de B (Rolão de milho kg)**		
Níveis de A (Qtde de ração)	**b_1 = 0,5 kg**	**b_2 = 1,0 kg**	**Total**
a_1 = 0,5 kg de A	38,763	42,867	**81,630**
a_2 = 0,5 kg de B	52,419	51,370	**103,789**
Total	**91,182**	**94,237**	**185,419**

Quadro II (totais da interação A x C)

(12)	**Níveis de C (Dose de vit. B_{12} mg)**		
Níveis de A (Qtde de ração)	**c_1 = 0,0 mg**	**c_2 = 5,0 mg**	**Total**
a_1 = 0,5 kg de A	41,592	40,038	**81,630**
a_2 = 0,5 kg de B	42,437	61,352	**103,789**
Total	**84,029**	**101,390**	**185,419**

Quadro III (totais da interação B x C)

(12) Níveis de B (Qtde de rolão de milho kg)	Níveis de C (Dose de vit. B_{12} mg)		
	c_1 = 0,0 mg	c_2 = 5,0 mg	Total
b_1 = 0,5 kg	40,058	51,124	**91,182**
b_2 = 1,0 kg	43,971	50,266	**94,237**
Total	**84,029**	**101,390**	**185,419**

Somas de quadrados da ANOVA preliminar:

$$SQT = (3{,}029^2 + \dots + 4{,}314^2) - \frac{185{,}419^2}{(2)(2)(2)(6)} = 49{,}845;$$

$$SQTr = \frac{19{,}459^2}{6} + \dots + \frac{29{,}352^2}{6} - \frac{185{,}419^2}{(2)(2)(2)(6)} = 26{,}748;$$

$$SQBl = \frac{1}{8}(29{,}362^2 + \dots + 31{,}018^2) - \frac{185{,}419^2}{(2)(2)(2)(6)} =$$

$$= 2{,}134;$$

$$SQR = SQT - SQTr - SQBl = 20{,}963$$

$$SQ(A) = \frac{81{,}630^2}{(2)(12)} + \frac{103{,}789^2}{(2)(12)} - \frac{185419^2}{(2)(2)(2)(6)} = 10{,}230;$$

$$SQ(B) = \frac{91{,}182^2}{(2)(12)} + \frac{94{,}237^2}{(2)(12)} - \frac{185{,}419^2}{(2)(2)(2)(6)} = 0{,}194;$$

$$SQ(C) = \frac{84{,}029^2}{(2)(12)} + \frac{101{,}390^2}{(2)(12)} - \frac{185{,}419^2}{(2)(2)(2)(6)} = 6{,}279;$$

Par o cálculo das soma de quadrados das interações precisamos calcular as somas de quadrados conjuntas. Para a interação ***AxB***, temos:

$$SQ(A,B) = \frac{1}{12}(38{,}763^2 + \dots + 51{,}370^2) - \frac{185{,}419^2}{(2)(2)(2)(6)} = 10{,}992$$

$$S.Q(AxB) = SQ(A,B) - SQ(A) - SQ(B) = 10{,}192 - 10{,}230 - 0{,}194 = 0{,}568$$

Para a interação ***AxC***, temos:

$$SQ(A,C) = \frac{1}{12}(41{,}592^2 + \dots + 61{,}352^2) - \frac{185{,}419^2}{(2)(2)(2)(6)} = 25{,}358$$

$$SQ(AxC) = 25{,}238 - 10{,}230 - 6{,}279 = 8{,}729$$

Para a interação ***BxC***, temos:

$$SQ(B,C) = \frac{1}{12}(40{,}058^2 + ... + 50{,}266^2) - \frac{185{,}419^2}{(2)(2)(2)(6)} = 6{,}948$$

$$SQ(BxC) = 6{,}948 - 0{,}194 - 6{,}279 = 0{,}475$$

$$SQ(AxBxC) = SQTr - SQ(A) - SQ(B) - SQ(C) -$$
$$- SQ(AxB) - SQ(AxC) - SQ(BxC) = 0{,}289$$

Fonte de variação	*gl*	*S.Q.*	*Q.M.*	*F*
Ração (A)	*1*	*10,230*	*10,230*	$17{,}078^{**}$
Rolão (B)	*1*	*0,194*	*0,194*	$0{,}324^{ns}$
Vitamina B_{12} *(C)*	*1*	*6,279*	*6,279*	$10{,}482^{**}$
Int.(AxB)	*1*	*0,568*	*0,568*	$0{,}948^{ns}$
Int. (AxC)	*1*	*8,729*	*8,729*	$14{,}573^{**}$
Int. (BxC)	*1*	*0,475*	*0,475*	$0{,}793^{ns}$
Int. (AxBxC)	*1*	*0,289*	*0,289*	$0{,}482^{ns}$
Tratamentos	*(7)*	*26,748*	*3,821*	$6{,}380^{**}$
Blocos	*5*	*2,134*	*0,427*	$0{,}713^{ns}$
Resíduo	*35*	*20,963*	*0,599*	
Total	*47*	*48,845*		

$F_{(5,\ 35;\ 0{,}05)} = 2{,}49$ $F_{(3,\ 35;\ 0{,}01)} = 3{,}61$ $F_{(1,\ 35;\ 0{,}05)} = 4{,}13$ $F_{(1,\ 35;\ 0{,}01)} = 7{,}44$

Conclusões:

- a interação ***AxBxC*** é não significativa (p>0,05), indicando a possibilidade de independência entre os fatores.
- os testes F das interações duplas indicam que somente a interação ***AxC*** é significativa (p<0,01), ou seja, os dados suportam uma conclusão de que os tipos de rações interagem com a dose de vitamina B_{12} na produção de leite.

Desdobramento da interação AxC: estudo dos efeitos simples do fator ração (A) nos níveis das doses de vitamina B_{12} (C)

- Cálculo da SQ do efeito da ração na ausência da vitamina B_{12}

$$SQ(A_{dentro\ C_1}) = \frac{1}{12}(41{,}592^2 + 42{,}437^2) - \frac{84{,}029^2}{24} = 0{,}030$$

- Cálculo da SQ do efeito da ração na presença da vitamina B_{12}

$$SQ(A_{dentro\ de C_2}) = \frac{1}{12}(40{,}038^2 + 61{,}352^2) - \frac{101{,}390^2}{24} = 18{,}929$$

Quadro da ANOVA do desdobramento:

Fonte de variação	*gl.*	*SQ*	*QM*	*F*
$A_{dentro\ de\ C_1}$	*1*	*0,030*	*0,030*	$0{,}05^{NS}$
$A_{dentro\ de C_2}$	*1*	*18,929*	*18,929*	*31,601***
Resíduo	*35*	*20,963*	*0,599*	

Conclusão: as rações não produzem efeito significativo (p>0,05) na ausência da vitamina B_{12}, enquanto que na presença da vitamina B_{12} as rações têm efeito significativo (p<0,01) diferenciado.

Exemplo 4 análise de um fatorial 3 x 4 : experimento sobre a qualidade do ovo, em unidades Haugh, segundo 3 embalagens e 4 tempos de armazenamento de estocagem.

Embalagem	Tempo	Blocos			
A_i	B_j	I	II	III	IV
1	1	66	52	57	68
1	2	47	47	32	43
1	3	43	50	39	40
1	4	20	23	43	41
2	1	81	68	60	55
2	2	62	34	44	45
2	3	43	41	47	54
2	4	51	32	29	34
3	1	81	82	80	78
3	2	84	68	66	65
3	3	58	43	37	57
3	4	75	45	59	48

Quadro da ANOVA

F.V.	G.L.	S.Q.	Q.M.	F
Embalagem (A)	2	3427,125	1713,562	$24{,}586^{**}$
Tempo (B)	3	5186,229	1728,748	$24{,}803^{**}$
Interação A x B	6	768,708	128,118	$1{,}838^{ns}$
Tratamentos	(11)	9382,06	852,91	$12{,}24^{**}$
Blocos	3	829,729	276,576	$3{,}968^{*}$
Resíduo	33	2300,021	69,697	
Total	47	12511,812		

Conclusões:

- o efeito da interação ***A x B*** é não significativo (p>0,05), ou seja, existe uma independência entre os fatores.
- efeito do fator embalagem (***A***) é significativo (p<0,05).
- efeito do fator tempo (***B***) é significativo (p<0,05).

Teste de Tukey para o fator ***A***

$$q_{(3,33,0,05)} = 3{,}49$$

$$dms_A = 3{,}49\sqrt{\frac{69{,}697}{16}} = 7{,}28$$

Teste de Tukey para o fator ***B***

$$q_{(4,33,0,05)} = 3{,}85$$

$$dms_B = 3{,}85\sqrt{\frac{69{,}697}{12}} = 9{,}28$$

Quadro dos valores médios observados

(4)	B_1	B_2	B_3	B_4	$\overline{Y}_{i++}$
A_1	60,75	42,25	43,00	31,75	***44,44 A***
A_2	66,00	46,25	46,25	36,50	***48,75 A***
A_3	80,25	70,75	48,75	56,75	***64,12 B***
$\overline{Y}_{+j+}$	***69,00 a***	***53,08 b***	***46,00 bc***	***41,67 c***	**52,44**

Médias com a mesma letra minúscula nas linhas não diferem entre si pelo teste de Tukey a 5%
Médias com a mesma letra maiúscula nas colunas não diferem entre si pelo teste de Tukey a 5%

Exemplo 5. Em um experimento de substituição do farelo de soja pelo farelo de girassol na ração de suínos, montou-se um experimento fatorial 2x5, com os fatores **Sexo** (machos e fêmeas) e **Ração** com substituição de farelo de soja por farelo de girassol (0%, 25%, 50%, 75% e 100%), utilizando-se 30 suínos (15 machos e 15 fêmeas) castrados da raça Duroc-Jersey, num delineamento em blocos casualizados com 3 repetições, de acordo com os grupos de pesos iniciais. Os resultados de ganho de peso dos animais aos 112 dias de experimento estão apresentados na tabela a seguir:

Bloco	**Machos**					**Fêmeas**				
	G_0	G_{25}	G_{50}	G_{75}	G_{100}	G_0	G_{25}	G_{50}	G_{75}	G_{100}
1	85,0	94,5	99,5	93,0	83,0	77,9	71,5	67,5	71,5	89,5
2	86,0	96,0	98,0	96,0	80,0	83,2	73,5	63,5	70,8	91,8
3	84,0	95,8	104,0	90,5	78,5	83,5	70,5	65,0	72,5	92,9
Total	**255,0**	**286,3**	**301,5**	**279,5**	**241,5**	**244,6**	**215,5**	**196,0**	**214,8**	**274,2**

Pede-se:

- Montar o esquema da Análise de Variância e fazer os testes convenientes;
- Comparar as médias dos níveis do fator G dentro de cada um dos níveis do fator S;
- Construir gráficos para estudar o comportamento das respostas médias dos níveis de G para cada um dos níveis de S.

Quadros auxiliares

Sexo	Ração					Total
	G_0	G_{25}	G_{50}	G_{75}	G_{100}	
1	255,0	286,3	301,5	279,5	241,5	1363,8
2	244,6	215,5	196,0	214,8	274,2	1145,1
Total	499,6	501,8	497,5	494,3	515,7	2508,9

Bloco	B_1	B_2	B_3	Total
Total	832,9	838,8	837,2	2508,9